

$y = e^{-x}(x^2 - 3)$ のグラフをかきなさい

増減や凹凸を調べるため微分する。導関数の公式

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

を使うと

$$\begin{aligned}y' &= \{e^{-x}(x^2 - 3)\}' \\ &= (e^{-x})'(x^2 - 3) + e^{-x}(x^2 - 3)'\end{aligned}$$

$y = e^{-x}(x^2 - 3)$ のグラフをかきなさい

$$y' = (e^{-x})'(x^2 - 3) + e^{-x}(x^2 - 3)'$$

$$= -e^{-x}(x^2 - 3) + e^{-x} \cdot 2x$$

$$= -e^{-x}(x^2 - 3) - e^{-x} \cdot (-2x)$$

$$= -e^{-x}(x^2 - 2x - 3)$$

$$= -e^{-x}(x + 1)(x - 3)$$

$-e^{-x} \neq 0$ なので

$y' = 0$ を解くと $x = -1, 3$ 

$y = e^{-x}(x^2 - 3)$ のグラフをかきなさい

もう一度微分する。

$$\begin{aligned}y'' &= \{-e^{-x}(x^2 - 2x - 3)\}' \\ &= (-e^{-x})'(x^2 - 2x - 3) \\ &\quad + (-e^{-x})(x^2 - 2x - 3)' \\ &= e^{-x}(x^2 - 2x - 3) - e^{-x}(2x - 2) \\ &= e^{-x}(x^2 - 2x - 3 - (2x - 2)) \\ &= e^{-x}(x^2 - 4x - 1)\end{aligned}$$

$y = e^{-x}(x^2 - 3)$ のグラフをかきなさい

$e^{-x} \neq 0$ なので $y'' = e^{-x}(x^2 - 4x - 1) = 0$ を
解の公式を使って解くと $x = 2 \pm \sqrt{5}$ 

$$y' = -e^{-x}(x^2 - 2x - 3) \quad y'' = e^{-x}(x^2 - 4x - 1)$$

$$y' = 0 \quad \text{の解は} \quad x = -1, 3$$

$$y'' = 0 \quad \text{の解は} \quad x = 2 \pm \sqrt{5}$$

$\sqrt{5} \doteq 2.2$ なので

$$2 + \sqrt{5} \doteq 4.2$$

$$2 - \sqrt{5} \doteq -0.2$$

となつて、大小関係は

$$-1 < 2 - \sqrt{5} < 3 < 2 + \sqrt{5} \quad \text{となる。}$$

$$y' = -e^{-x}(x^2 - 2x - 3) \quad y'' = e^{-x}(x^2 - 4x - 1)$$

増減表をかくと

x	...	-1	...	$2 - \sqrt{5}$...	3	...	$2 + \sqrt{5}$...
y'		0				0			
y''				0				0	
y									

$$y' = -e^{-x}(x^2 - 2x - 3) \quad y'' = e^{-x}(x^2 - 4x - 1)$$

増減表をかくと

x	...	-1	...	$2 - \sqrt{5}$...	3	...	$2 + \sqrt{5}$...
y'	-	0	+	+	+	0	-	-	-
y''				0				0	
y									

$$y' = -e^{-x}(x^2 - 2x - 3) \quad y'' = e^{-x}(x^2 - 4x - 1)$$

増減表をかくと

x	...	-1	...	$2 - \sqrt{5}$...	3	...	$2 + \sqrt{5}$...
y'	-	0	+	+	+	0	-	-	-
y''	+	+	+	0	-	-	-	0	+
y									

$$y' = -e^{-x}(x^2 - 2x - 3) \quad y'' = e^{-x}(x^2 - 4x - 1)$$

増減表をかくと

x	...	-1	...	$2 - \sqrt{5}$...	3	...	$2 + \sqrt{5}$...
y'	\searrow	0	\nearrow	\nearrow	\nearrow	0	\searrow	\searrow	\searrow
y''	+	+	+	0	-	-	-	0	+
y									

$$y' = -e^{-x}(x^2 - 2x - 3) \quad y'' = e^{-x}(x^2 - 4x - 1)$$

増減表をかくと

x	...	-1	...	$2 - \sqrt{5}$...	3	...	$2 + \sqrt{5}$...
y'	\searrow	0	\nearrow	\nearrow	\nearrow	0	\searrow	\searrow	\searrow
y''	\cup	\cup	\cup	0	\cap	\cap	\cap	0	\cup
y									

$$y' = -e^{-x}(x^2 - 2x - 3) \quad y'' = e^{-x}(x^2 - 4x - 1)$$

増減表をかくと

x	...	-1	...	$2 - \sqrt{5}$...	3	...	$2 + \sqrt{5}$...
y'		0				0			
y''				0				0	
y									

$$y' = -e^{-x}(x^2 - 2x - 3) \quad y'' = e^{-x}(x^2 - 4x - 1)$$

増減表をかくと

x	...	-1	...	$2 - \sqrt{5}$...	3	...	$2 + \sqrt{5}$...
y'	\searrow	0	\nearrow	\nearrow	\nearrow	0	\searrow	\searrow	\searrow
y''	\cup	\cup	\cup	0	\cap	\cap	\cap	0	\cup
y	\curvearrowright		\curvearrowleft		\curvearrowleft		\curvearrowright		\curvearrowright

$x = -1, 2 - \sqrt{5}, 3, 2 + \sqrt{5}$ の値を計算しよう。

$y = e^{-x}(x^2 - 3)$ のグラフをかきなさい

$x = -1$ のとき

$$y = e^{-(-1)} \left((-1)^2 - 3 \right)$$

$$= e \cdot (-2)$$

$$= -2e$$



$y = e^{-x}(x^2 - 3)$ のグラフをかきなさい

$x = 3$ のとき

$$y = e^{-3}(3^2 - 3)$$

$$= \frac{1}{e^3} \cdot 6 = \frac{6}{e^3}$$



$y = e^{-x}(x^2 - 3)$ のグラフをかきなさい

$x = 2 - \sqrt{5}$ のとき

$$y = e^{-(2-\sqrt{5})} \left((2-\sqrt{5})^2 - 3 \right)$$

$$= e^{-2+\sqrt{5}} (4 - 4\sqrt{5} + 5 - 3)$$

$$= e^{-2+\sqrt{5}} (6 - 4\sqrt{5})$$



$y = e^{-x}(x^2 - 3)$ のグラフをかきなさい

$x = 2 + \sqrt{5}$ のとき

$$y = e^{-(2+\sqrt{5})} \left((2+\sqrt{5})^2 - 3 \right)$$

$$= e^{-2-\sqrt{5}} (4 + 4\sqrt{5} + 5 - 3)$$

$$= e^{-2-\sqrt{5}} (6 + 4\sqrt{5})$$



まとめると

$y = e^{-x}(x^2 - 3)$ のグラフをかきなさい

x	...	-1	...	$2 - \sqrt{5}$...	3	...	$2 + \sqrt{5}$...
y'		0				0			
y''				0				0	
y		$-2e$		$e^{-2+\sqrt{5}}(6-4\sqrt{5})$		$\frac{6}{e^3}$		$e^{-2-\sqrt{5}}(6+4\sqrt{5})$	

y 軸との交点、 x 軸との交点も計算しよう。

$y = e^{-x}(x^2 - 3)$ のグラフをかきなさい

y 軸との交点は $x = 0$ を代入すればよいので

$$e^{-0}(0^2 - 3)$$

$$= e^0 \cdot (-3)$$

$$= 1 \cdot (-3)$$

$$= -3$$



$y = e^{-x}(x^2 - 3)$ のグラフをかきなさい

x 軸との交点は $y = 0$ を代入すればよいので

$$e^{-x}(x^2 - 3) = 0$$

$e^{-x} \neq 0$ なので

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$



$y = e^{-x}(x^2 - 3)$ のグラフをかきなさい

$x \rightarrow \infty$ のとき $e^{-x}(x^2 - 3) = \frac{x^2 - 3}{e^x}$ は

$x^2 - 3$ の増え方 $<$ e^x の増え方 　　なので

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{e^x} = 0$  となる。

$y = e^{-x}(x^2 - 3)$ のグラフをかきなさい

$x \rightarrow -\infty$ のとき $e^{-x}(x^2 - 3)$ は

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-(-\infty)} \left((-\infty)^2 - 3 \right)$$

$$= e^{\infty} (\infty^2 - 3)$$

$$= \infty$$



これらすべてをまとめてグラフをかくと

$y = e^{-x}(x^2 - 3)$ のグラフ

